مقارنة طريقتي (MLE &LSD) لتقدير معلمات توزيع فريشيتبواسونليندلي المركب (دراسة محاكاة)

عماد حازم عبودي

علي بندر نعيمه

قسم الرياضيات, كلية الادرة والاقتصاد, جامعة بغداد

استلم البحث:4 ايلول 2016 ,قبل البحث: 2 تشرين الثاني 2016

الخلاصة

تم في هذا البحث استعمال المحاكاة في المقارنة بين طريقتي الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى المطورة (MLE &DLS)لتقدير معلمات توزيع فريشيتبواسونليندليالمركب (frechetpoissonlindley distribution compound). وتم استعمال برنامج بلغة الماتلاب في المقارنة بين الطريقتين بافتراض عدد من الحالات وعدد من احجام العينات واستعمال مقياس المقارنة (MSE) للمقارنة بين طريقتي التقدير وقد اظهرت نتائج المحاكاة ان طريقة الامكان الاعظم كانت افضل بكثير من طريقة المربعات الصغرى المطورة في تقدير معالم التوزيع المركب الجديد.

الكلمات المفتاحية :فريشيت , بواسونليندلي , التوزيعات المركبة, محاكاة ,MLE &DLS)).

المقدمة

تعد التوزيعات الاحتمالية المركبة (Compound Distributions) من التوزيعات المهمة في نمذجة الكثير من الظواهر كون هذه التوزيعات اكثر مرونة من التوزيعات القياسية وقد اهتم الكثير من الباحثين في دراسة مثل هذا النوع من التوزيعات سواء كانت مستمرة او مقطعة ,وهي التوزيعات التي تنتج من تِركيب توزيعين او اكثر من التوزيعات لتمثيل بعض البيانات التي لا يمكن تمثيلها بالتوزيعات الاحصائية القياسية بالشكل المطلوب لكون طبيعة هذه البيانات او الظواهر تحتم استعمال توزيعات مركبة تكون اكثر مرونة من التوزيعات القياسية في تمثيلها, وهنا تأتي اهمية دراسة طريقتي التقدير (MLE &DLS) لتقدير معلمات توزيع مقترح جديد من قبل الباحثين هو توزيع فريشت بواسونليندلي (frechetpoissonlindley distribution compound) وهذا التوزيع ناتج من تركيب توزيع بواسونليندلي مع توزيع فريشيت ويمكن استعماله في نمذجة بيانات الكثير من الظواهر ويكون اكثر مرونة من التوزيعات القياسية الاخرى.

هدف البحث

ان الهدف من هذا البحث هو مقارنة طريقتي تقدير(MLE &DLS) لتقدير معالم توزيع مقترح جديد من قبل الباحثين هو توزيع فريشت بواسونليندلي (frechetpoissonlindley distribution compound)وهذا التوزيع هو عبارة عن توزيع مركب من توزعين هما توزيع بواسونليندلي(توزيع متقطع) مع توزيع فريشيت (Frechet Distribution) وتحديد اي الطريقتين تكون افضل في تقدير معالم هذا التوزيع باستخدام المحاكاة من خلال توظيف مقياس المقارنة (MSE) .

الجانب النظري

1- توزيع فريشيتبواسون – ليندلي (التوزيع المقترح) Frechet Poisson lindleyDistribution

يعد التوزيع المقترح واحدا" من التوزيعات المركبة لكونه اكثر مرونة من التوزيعات القياسية في تمثيل البيانات اذ ان استخدام هذا التوزيعات يعطي تقديرات اكثر دقة من التوزيعات القياسية فضلا عن ان له تطبيقات واسعة في العديد من المجالات وعلى سبيل المثال يستعمل كدالة فشل في المعولية ودوال البقاء فضلا عن استعماله في التنبؤ بحدوث العديد من الظواهر الطبيعية كظاهرة الهزات الأرضية والزلازل.

يمكن تعريف هذا التوزيع بانه توزيع مركب من توزيعين هما توزيع فريشت(Frechetdistribution)المستمر وتوزيع بواسونليندلي المتقطع Poisson lindley وان عملية الاشتقاق لهذا التوزيع كمايـأتي:-

نفرض أن $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ تمثل عينة عشوائية تتبع توزيع فريشيت (Frechetdistribution) وبدالة كثافة احتمالية P.d.f. :[1][2] [3]

$$f(Z,\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{Z}\right)^{\alpha+1} e^{-\left(\frac{\beta}{Z}\right)^{\alpha}} \qquad \alpha,\beta > 0 \ , \quad 0 < Z < \infty$$

نفترض أن (N)، يمثل متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع بواسونليندلي بدالة كثافة احتمالية:

$$\mathrm{P[N=n]} = \frac{\theta^2}{(1+3\theta+\theta^2)} \frac{(2+\theta+n)}{(\theta+1)^n} \ , n \in N \quad و \quad n=1,2,3,\dots.$$

نفترض أن $(X = \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_N))$، وأن (N) و (Z's) مستقلة، فأن التوزيع لـ(X/N=n)، يمكن ايجاده على النحو الاتي:

لدينا:

$$\mathrm{g}(X_k/N = n) = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} \quad [1 - F(X_k)]^{n-k} \quad [F(X_k)]^{k-1} \dots\dots\dots\dots (1)$$

بما أن: $X = \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$

Let K=1

$$\mathrm{g}(X_k/N = n) = \frac{n!}{(n-1)!!}[1 - F(X)]^{n-1}[F(X)]^0 f(X) \qquad \dots\dots (2)$$

$$\mathrm{F(X)} = e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}} \qquad \dots (3)$$

$$\mathrm{f(X)} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha+1} e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}} \qquad \dots (4)$$

نعوض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (2)، نحصل على :

$$g(X/N=n)=n\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{n-1}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}} \qquad \dots(5)$$

بما ان $g(X,n;\theta,\beta,\alpha)=g(X/N=n)*P[N=n]$

وان الدالة المشتركة لتوزيع X مع n

$$g(X,n;\theta,\beta,\alpha)=n\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{n-1}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\frac{\theta^2}{(1+3\theta+\theta^2)}\frac{(2+\theta+n)}{(\theta+1)^n} \qquad \dots(6)$$

$$g(X;\theta,\beta,\alpha)=\frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha+1}\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{-1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(1+3\theta+\theta^2)\beta X^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^{\infty}n\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{n}\frac{(2+\theta+n)}{(\theta+1)^n} \qquad \dots(7)$$

$$g(X;\theta,\beta\alpha,)=\frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha+1}\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{-1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(1+3\theta+\theta^2)\beta X^{\alpha+1}}[(2+\theta)I+J] \qquad \dots(8)$$

أذ أن:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{n}}{(\theta+1)^n} \qquad \dots(9)$$

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{n}}{(\theta+1)^n} \qquad \dots(10)$$

وبإيجاد حل للمتسلسلتين (9) و(10) على النحو الاتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ny^n=[y+2y^2+3y^3+\cdots]=\frac{y}{(1-y)^2}$$

فأن حل المتسلسلة (I)، تكون على النحو الاتي:

$$I=\left(\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right)^2}$$

$$I=\left(\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right)\frac{(\theta+1)^2}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2}$$

$$I=\frac{(\theta+1)\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2} \qquad \dots(11)$$

أما بالنسبة للمتسلسلة (J)، فتكون على النحو الاتي:

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right]^n=\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}+4\left[\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right]^2+9\left[\frac{1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(\theta+1)}\right]^3+\cdots$$

وأن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^n = [y + 4y^2 + 9y^3 + \cdots] = \frac{y(1+y)}{(1-y)^3}$$

فأن حل المتسلسلة (J)، تكون على النحو الاتي:

$$J = \frac{(\theta+1)\left(\theta + 2 - e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta - e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3} \quad \dots (12)$$

الأن نعوض المعادلتين (12) و (11) في المعادلة (8) فنحصل على :

$$g(X;\theta,\beta,\alpha) = \frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha+1}\left[1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right]^{-1} e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(1+3\theta+\theta^2)\beta X^{\alpha+1}}\left[(2+\theta)\frac{(\theta+1)\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2} + \frac{(\theta+1)\left(\theta+2-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3}\right]$$

$$g(X;\theta,\beta,\alpha) = \frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}}{(1+3\theta+\theta^2)\beta X^{\alpha+1}}\left[(2+\theta)\frac{(\theta+1)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2} + \frac{(\theta+1)\left(\theta+2-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3}\right]$$

$$g(X;\theta,\beta,\alpha) = \frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+1)}{(1+3\theta+\theta^2)\beta X^{\alpha+1}}\left[\frac{(\theta+1)(\theta+2)+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+1)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3}\right]$$

$$g(X;\theta,\beta,\alpha) = \frac{\alpha\theta^2\beta^{\alpha}e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+1)^2}{(1+3\theta+\theta^2)X^{\alpha+1}}\left[\frac{\left(\theta+2+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3}\right] \dots (13)$$

$$\theta > 0 \quad ,\beta > 0 \quad ,\alpha > 0 \qquad ,x > 0$$

2- تقديرات الامكان الاعظم لتوزيع فريشت بواسون ليندلي

تعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة في تقدير المعلمات لأنها تحتوي على خصائص جيدة ، ومن اهم هذه الخصائص هي خاصية الثبات التي تعني ان المعلمة المقدرة باستعمال هذه الطريقة تحتوي على اكبر كمية من المعلوماتوعند تعويضها في دوال اخر مثل دالة المعولية فان هذه المقدرات تبقى هي اعظم ما يمكن, يمكن تعريف التقديرباستعمالهذه الطريقة بانه قيم

المعلمات التي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، إذا كانت $x_1, x_2, \ldots x_n$ تمثل مفردات عينة عشوائية حجمها (n)

فان دالة الإمكان الاعظم يرمز لها (L).[4]

أي أن:

$$L = f(x_1, \theta)\ f(x_2, \theta)\ldots\ldots f(x_n, \theta)$$

وبما ان دالة الاحتمالية للتوزيع المقترح الاول

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^2\beta^\alpha e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}(\theta+1)^2}{(1+3\theta+\theta^2)X^{\alpha+1}}\left[\frac{\left(\theta+2+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3}\right]$$

فان

$$\mathrm{Lf} = \left[\frac{\alpha\theta^2\beta^\alpha(\theta+1)^2}{(1+3\theta+\theta^2)}\right]^n e^{-\sum_{i=1}^n\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\prod_{i=1}^n\frac{1}{X^{\alpha+1}}\prod_{i=1}^n\left[\frac{2+\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}}{\left(\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)^3}\right]$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\ln \mathrm{L\,f} = 2n\ln\theta + n\ln\alpha + 2n\ln(1+\theta) + \alpha n\ln\beta - n\ln(1+3\theta+\theta^2) - \sum_{i=1}^n\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha - (\alpha+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n \ln\left(2+\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right) - 3\sum_{i=1}^n \ln\left(\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} + \frac{2n}{(\theta+1)} - \frac{n2\theta+3n}{(\theta^2+3\theta+1)} + \sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(2+\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)} - 3\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial^2\theta} = -\frac{2n}{\theta^2} - \frac{2n}{(\theta+1)^2} - \frac{n(2\theta+3)^2}{(\theta^2+3\theta+1)^2} - \frac{2n}{(\theta^2+3\theta+1)}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(2+\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)^2} + 3\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(\theta+e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}\right)^2}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\beta} = \frac{\alpha n}{\beta} - \sum_{i=1}^n\frac{\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^n\frac{\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{\left(e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}+\theta+2\right)\beta} + 3\sum_{i=1}^n\frac{\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{\left(e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}+\theta\right)\beta}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial^2\beta} = \frac{-\alpha n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n\frac{\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n\frac{2\alpha^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}(1+\theta)}{\left(\theta e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)\beta^2\left((2+\theta)e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)} + \sum_{i=1}^n\frac{2\alpha^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\left((3+\theta)e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)}{\left(\theta e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)\beta^2\left((2+\theta)e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)} - \sum_{i=1}^n\frac{2\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\left((3+\theta)e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)}{\left(\theta e^{-(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)\beta^2\left((2+\theta)e^{(\frac{\beta}{x})^\alpha}+1\right)} -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2\alpha^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}\left((3+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)}{\left(\theta e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)\beta^2\left((2+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+\theta)2\alpha^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\left((3+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)}{\left(\theta e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)\beta^2\left((2+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\text{nln}\beta-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)+\sum_{i=1}^{n}ln\,x_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+2+\theta\right)}+3\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta\right)}$$

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\,\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\left((2+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)^2\beta}-3\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\left(\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)^2\beta}$$

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\,\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)}{\left((2+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)^2}-3\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)}{\left(\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+1\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\alpha+1\right)}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}\alpha}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta+2\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta+2\right)}+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}\alpha e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta+2\right)^2}-3\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}\alpha}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta\right)}-3\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta\right)}-$$
$$3\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2\alpha}\alpha e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{\beta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}+\theta\right)^2}$$

ان منظومة المعادلات اعلاه ليمكن حلها باستعمال الطرائق الاعتيادية وعليه يجب استعمال احدى الطرائق العددية لحلها وتم استعمال طريقة نيوتن رافسونمع ملاحظة ان حساب المشتقة الثانية والمشتقات الجزئية ضرورية في تقدير المعلمات المطلوبة وفق الصيغة الاتية

$$[\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}]=[\mathrm{X}_{\mathrm{n}}]-[\mathrm{J}]^{-1}[\mathrm{f}]$$

عندما
$$[\mathrm{f}]=\begin{bmatrix}\frac{\partial lnL}{\partial^2\theta}\\ \frac{\partial lnL}{\partial^2\beta}\\ \frac{\partial lnL}{\partial^2\alpha}\end{bmatrix},[\mathrm{X}_{\mathrm{n}}]=\begin{bmatrix}\theta\\ \beta\\ \alpha\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial lnL}{\partial\theta} & \frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\partial\beta} & \frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\partial\alpha}\\ \frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\partial\beta} & \frac{\partial lnL}{\partial\beta} & \frac{\partial^2 lnL}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 lnL}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial lnL}{\partial\alpha}\end{bmatrix},$$

نستعمل برنامج بلغة ماتلاب لتقدير المعلمات الثلاثة من خلال قيم افتراضية للمعلمات الثلاثة وتكرار البرنامج 1000مرة يتم الحصول على التقديرات المطلوبة وهذا الاجراء تم عمله في هذا البحث .

طريقة المربعات الصغرى المطورة Least Square developed (LSD)

"اقترحت هذه الطريقة مقبل الباحثين(Swain, Venkatraman and Wilson) عام 1988 وتسمى هذه الطريقة ايضا بأسلوب الانحدار (Regression Procedure) واستعملتمن قبل الباحثين لتقدير معلمات توزيع بيتا وبالإمكان استعملها لتقدير معلمات توزيعات اخرى" انظر[5].اذ ان طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية تستعمل لتقدير معلمات نماذج الانحدار بينما الطريقة المطورة تستخدم لتقدير معلمات نماذج اخرى من خلال تحويل هذه النماذج الى صيغة مجموعة مربعات الانحرافات (الصيغة المعتمدة في طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية) وتسمى عند اذن طريقة المربعات الصغرى المطورة .

نفرض لدينا$(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ تمثل عينة عشوائية تتوزع توزيع معين G(.) وان x_i يمثل الاحصاءات المرتبة لقيم العينة[6]

وان
$$E(G(x_i)) = \frac{i}{n+1}$$

$$v\big(G(x_i)\big) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

وباستعمال التوقع والتباين نستطيع الحصول على مقدرات المربعات الصغرى OLS كالاتي

$$ei^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(G(X) - \frac{i}{n+1}\right)^2$$

وان الدالة التراكمية (C.D.F)للتوزيع المقترح توزيع (Frechet Poisson lindley distribution)

$$G(X) = 1 - \frac{\theta^2}{(1+3\theta+\theta^2)} \frac{\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2} \qquad \dots (14)$$

وأن مجموع مربعات الخطأ هي:

$$\left(\sum e_i^2 = \sum\left(\left(1 - \frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2}\right) - \frac{i}{n+1}\right)^2 \qquad \dots (15)\right.$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial\theta} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)^2} - \frac{i}{n+1}\right)$$
$$\left(\frac{\theta(1+\theta)\left(-(\theta+1)(\theta+4)+e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\left(2-\theta(\theta+1)(\theta+5)\right)\right)+e^{2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)}{(1+3\theta+\theta^2)^2\left(1+\theta e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)^3}\right) \qquad \dots (16)$$

$$\frac{\partial^2 \sum e_i^2}{\partial\theta^2} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)\left(1+\theta+(2+\theta)\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)^2} - \frac{i}{n+1}\right)$$
$$\left(\frac{\left(e^{2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}(\theta(\theta+1)(5\theta^2+27\theta+24)+2)+e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\left(2-\theta(\theta(5\theta^2+28\theta+33)+6)\right)-2(\theta+1)(2\theta^2+7\theta+2)\right)}{\left((1+3\theta+\theta^2)^2\left(1+\theta e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\right)^3\right)^2}\right.$$
$$\frac{\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\theta+1\right)^3(\theta^2+3\theta+1)^2(\theta^2+3\theta+1)\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}\theta+1\right)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}(7\theta^2+15\theta+3)+4\theta+6\right)}{\dots}$$

$$\left.\frac{\theta(1+\theta)\left(-(\theta+1)(\theta+4)+e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(2-\theta(\theta+1)(\theta+5)\right)\right)+e^{2\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2\right)}{\dots}\right)$$

$$+\left(\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\frac{\theta\left(e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(3\theta+4)+(\theta+2)(4\theta+1)\right)(1+3\theta+\theta^{2})\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{2}}{\left((1+3\theta+\theta^{2})\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{2}\right)^{2}}\right.$$

$$\left.\frac{-\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\left(e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(2\theta+3)+4\theta^{2}+9\theta+2\right)\theta^{2}\left(1+\theta+(2+\theta)\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\right)}{\dots}\right)^{2} \quad \dots(17)$$

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial B}=2\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\theta^{2}\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^{2})\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{2}}-\frac{i}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta(\theta+1)^{2}\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha\right)}{(1+3\theta+\theta^{2})\left(1+\theta e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{3}B}\right) \quad \dots(18)$$

$$\frac{\partial^{2}\sum e_i^2}{\partial B^{2}}=2\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\theta^{2}\left(1-e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^{2})\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{2}}-\frac{i}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{\theta^{2}(\theta+1)^{2}\alpha}{(1+3\theta+\theta^{2})}\right)\left(\frac{\frac{\alpha e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\left(\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}+2e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}+e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(2(\theta+2)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}+\theta\right)+1\right)\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{3}B-\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{2}}{B}}{\left(\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{3}B\right)^{2}}\right.$$

$$\left.\frac{\frac{\left(\theta e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(3\alpha\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}+1\right)+1\right)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}{\dots}}{\dots}\right)+\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta(\theta+1)^{2}\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha\right)}{(1+3\theta+\theta^{2})\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^{3}B}\right)^{2}$$

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^2}-\frac{i}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\theta^2(\theta+1)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(1+\theta e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3}\right)\quad\ldots(19)$$

$$\frac{\partial^2\sum e_i^2}{\partial\alpha^2}=2\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^2}-\frac{i}{n+1}\right)\left(\left(\frac{\theta^2(\theta+1)^2 ln\left(\frac{\beta}{x}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)}\right)\right.$$

$$\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha+2e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}+e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(2(\theta+2)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha+\theta\right)+1\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3-3\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^2\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}}{\left(\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3\right)^2}\right.$$

$$\left.\frac{e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\left(1+(2+\theta)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{\ldots}\right)+\left.\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\theta^2(1+\theta)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}(2+\theta)+1\right)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha ln\left(\frac{\beta}{x}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3}\right)^2\right)\quad\ldots(20)$$

$$\frac{\partial^2\sum e_i^2}{\partial\theta\partial B}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^2}-\frac{i}{n+1}\right)\right.$$

$$\left(\frac{\theta(\theta+1)}{(1+3\theta+\theta^2)}\right)\left(\frac{\frac{\alpha e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(2(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}-(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\right)}{B}\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3}{\left(\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3\right)^2}\right.$$

$$\left.\frac{-\frac{3\theta\alpha e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}{B}\left(-(\theta+1)(\theta+4)+e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(2-\theta(\theta+2)(\theta+5)+e^{2\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)\right)\right)}{\ldots}\right)$$

$$+\left(\frac{\theta(\theta+1)\left(-(\theta+1)(\theta+4)\right)+e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\left(2-\theta(\theta+2)(\theta+5)\right)+e^{2\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha}\right)^3(1+3\theta+\theta^2)^2}\right)$$

$$\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta^2(\theta+1)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3(1+3\theta+\theta^2)B}\right)\Bigg] \quad \ldots(21)$$

$$\frac{\partial^2\sum e_i^2}{\partial\theta\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2}-\frac{i}{n+1}\right)\right.$$

$$\left(\frac{\theta(\theta+1)}{(1+3\theta+\theta^2)^2}\right)\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(2(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}-(\theta(\theta+1)+2)\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3}{\left(\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3\right)^2}\right.$$

$$\left.\frac{-3\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)\left(-(\theta+1)(\theta+4)+e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(2-\theta(\theta+1)(\theta+5))+e^{2\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)\right)}{\ldots}\right)$$

$$+\left(\frac{\theta(\theta+1)\left(-(\theta+1)(\theta+4)+e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(2-\theta(\theta+2)(\theta+5))\right)(\theta(\theta+2)(\theta+5)+2)}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+3\theta+\theta^2)^2}\right)$$

$$\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta^2(\theta+1)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+3\theta+\theta^2)}\right)\Bigg] \quad \ldots(22)$$

$$\frac{\partial^2\sum e_i^2}{\partial B\partial\alpha}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\frac{\theta^2\left(1-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)(1+\theta+(2+\theta))\left(\theta-e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{(1+3\theta+\theta^2)\left(\theta+e^{-\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2}-\frac{i}{n+1}\right)\left(\frac{\theta^2(\theta+1)^2}{(1+3\theta+\theta^2)}\right)\right.$$

$$\left(\frac{\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha\left(1+(\theta+2)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)+\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\left((2+\theta)\alpha e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}+\left(1+(\theta+2)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\alpha ln\left(\frac{\beta}{X}\right)+1\right)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2}\right.$$

$$\left.\frac{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3-3\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^2\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\left(1+(\theta+2)e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha}{\ldots}\right)$$

$$\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta(\theta+1)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}\alpha}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3(1+3\theta+\theta^2)B}\right)\left(\frac{e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\theta^2(\theta+1)^2\left(e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}(\theta+2)+1\right)\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{X}\right)}{\left(1+\theta e^{\left(\frac{\beta}{X}\right)^{\alpha}}\right)^3(1+3\theta+\theta^2)}\right)\Bigg] \quad \ldots(23)$$

$$X=\beta\left[log\left(\frac{\frac{-(2(1-u)+\theta^2A-\theta^2)+\sqrt{(2(1-u)+\theta^2A-\theta^2)^2-4(A(1-u)+}}{2(A(1-u)+\theta^2(2+\theta^2)}}{\frac{\sqrt{\theta^2(2+\theta^2)(A\theta^2(1-u)+A\theta^2)}}{\cdots}}\right)\right]^{\frac{-1}{\alpha}} \quad ....(24)$$

المعادلات اعلاه تمثل منظومة معادلات لا خطيه لا يمكن حلها الا باستعمال احدى الطرائق العددية للحصول مقدرات DLS وسوف يتم استعمال طريقة نبوتن رافسون التكرارية لتقدير المعالم المطلوبة من خلال توظيف برنامج باستعمال لغة الماتلابوبالأسلوب نفسه الذي تم في طريقة الامكان الاعظم .

الجانب التجريبي

1- المحاكاة Simulation

"تعرف عملية المحاكاة بأنه عملية تقليد أو تمثيل للواقع الحقيقي باستعمال نماذج معينة وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون صعبة الفهم والتحليل لذلك نقوم بوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ان فهم النموذج يمكن ان يحقق قدراً من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي من خلال عملية محاكاة النموذج."[7][8]

اذ تبرز اهمية المحاكاة كواحدة من الحلول التي يلجأ اليها الباحثون في حل مشاكلهم التي تحتاج الى العديد من العينات وهذا الامر يشكل صعوبة بالغة ويتطلب مبالغ ووقت وجهد كبير . لذلك يلجأ الكثير من الباحثين الى استعمال اسلوب بديل وهو اسلوب المحاكاة الذي يختصر الوقت والجهد ويعطي امكانية واسعة ودقة في التعامل مع مختلف المشاكل , وقد تطور هذا الاسلوب تطورا كبيرا لاسيما مع تطور الحاسبات الإلكترونية والتطبيقات الحاسوبية, كما تمتاز المحاكاة بمرونة عالية اذ انها تعطي القدرة على عملية التجريب والاختبار عن طريق تكرار العملية عدة مرات بتفسير المدخلات الخاصة بعملية التقدير في كل مرة وتشتمل على استعمال الارقام العشوائية التي هي عبار عن سلسلة من الارقام المستقلة والتي تملك توزيعا منتظما ضمن المدة المحدد [1,0]وكذلك تأتي أهمية عملية المحاكاة في العشوائية, إذ أن سلسلة الأرقام العشوائية التي تستعمل في التجربة الأولى تكون مستقلة عن سلسلة الأرقام العشوائية في التجربة الثانية وهكذا.

2-مراحل تجربة المحاكاةSimulation Experiment stage

تضمنت مراحل تجربة المحاكاة خمس مراحل وهي

المرحلة الاولى: اختيار مجموعة من القيم الافتراضية للمعالم وبتشكيل عدد من الحالات

case	θ	β	α
1	1.5	0.3	6
2	1.5	0.09	2
3	2.5	0.05	1.5
4	2.5	0.01	2
5	3	0.06	4.5
6	4	0. 1	8.5

واختيار مجموعة من احجام عينات مختلفة وهي

n1=20 , n2= 40 , n3=50 , n4=100 , n5= 150 , n6=200 ,n7=300

المرحلة الثانية:-

للتوزيع المقترح (CDF) تضمنت هذه المرحلة توليد بيانات باستعمال طريقة التحويل المعكوس للدالة التجميعية

(24) والتي تم عرض الاشتقاق الخاصة بها في الفصل الثاني من هذه البحث بالمعادلة رقم

المرحلة الثالثة :-

في هذه المرحلة من التجربة من التي تعتبر اهم مراحل المحاكاة تم تقدير معلمات التوزيع المقترح توزيع (فريشيتبواسونليندلي)باستعمال الطرائق التي تم التطرق اليها في الجانب النظري وفق الحالات الافتراضية واحجام العينات التي تم افتراضها في المرحلة الاولى من تجربة المحاكاة.

المرحلة الرابعة:-

للمقارنة (MSE) تم في هذه المرحلة من البحث اجراء المقارنة بين طريقتي القدير باستعمال مقياس المقارنة بين المعلمات وفق الصيغة :-

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sum_{i}^{L}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^{2}}{L}\quad,\quad \mathrm{MSE}\left(\hat{\beta}\right)=\frac{\sum_{i}^{L}\left(\hat{\beta}-\beta\right)^{2}}{L}\quad,\mathrm{MSE}\left(\hat{\alpha}\right)=\frac{\sum_{i}^{L}\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)^{2}}{L}$$

يمثل عدد مرات تكرار التجربةLاذ ان

المرحلة الخامسة:-

تضمنت هذه المرحلة عرض نتائج المحاكاة من اجل ايجاد افضل لتقدير معلمات التوزيع المقترح كما موضح في الجداول (2-1)

خامسا: الاستنتاجاتConclusions

فيما يأتي عرض ملخص لاهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها:-

1- طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(21 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (0) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة الأولى .
2- طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(21 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (0) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة الثانية .
3- طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(13 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (8 مرات) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة الثالثة.
4- طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(21 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (0) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة الرابعة.
5- طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(17 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (4 مرات) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة الخامسة.
6 - طريقة الامكان الاعظم كانت افضل(14 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (7 مرات) باستعمال مقياس المقارنة MSE في التجربة السادسة .
7 - لجميع الحالات الستة أعلاه كانت طريقة الامكان الاعظم افضل(107 مرة) بينما كانت طريقة المربعات الصغرى افضل (19 مرة) باستعمال مقياس المقارنة MSE في جميع التجارب .
8 - الجدول رقم (2) يوضح ان عدد المرات التي يكون فيها متوسط مربعات الخطأ (MSE) للتقديرات(المعلمات) اقل في كلا من الطرقتين, بعبارة اخرى فان الطريقة التي يكون فيها عدد المرات للـ(MSE)اكثر تكون هي الطريقة الافضل وعليه فأن طريقة الامكان الاعظم افضل بكثير من طريقة المربعات الصغرى المطورة لأنها تعطي تقديرات يكون لها اقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وبالتي تكون هي الافضل

المصادر

1 - Asgharzadeh, A.; Bakouch, H. S. and Esmaeili, L. (2013). Pareto Poisson–Lindley distribution with applications. Journal of Applied Statistics, 40(8), 1717-173

2 - Ghitany, M. E.; Al-Mutairi, D. K. and Nadarajah, S. (2007). Zero-truncated Poisson–Lindley distribution and its application. Mathematics and Computers in Simulation, 79(3), 279-287

3 - Zakerzadeh, H. and Dolati, A. (2009). Generalized Lindley Distribution. Journal of Mathematical Extension

4 - Alathari, F. M. and Al-sarraf, Z. J. (2008).Maximum Likelihood Estimation of Truncated Normal Regression Model.Jornal AL-manarah, vol.14. No.3

5- Ashour, S. K. and Eltehiwy, M. A. (2015). Exponentiated power Lindley distribution. Journal of advanced research, 6(6), 895-905.

6- Merovci, F. and Elbatal, I. (2013). Transmuted Lindley-geometric distribution and its applications. arXiv preprint arXiv:1309.3774

7- الساعدي, سلام جاسم محمد,(2007),"إشتراكتوزيعيويبلوتكوينتوزيعالبايويبل",رسالة ماجستير, كليةالادارة والاقتصاد, جامعة بغداد.

8-بري, عدنان ماجد عبد الرحمن, (2002) " النمذجة والمحاكاة " كتاب الكتروني, جامعة الملك سعود قسم الاحصاء وبحوث العمليات. http://www.abarry.net/or/SimulationBook.pdf

جدول رقم (1)افضلية طريقتي التقدير باستعمال المقياس (MSE) لتقدير المعلمات لجميع الحالات ولتجربة تكرارها 1000

طرائق التقدير	عدد مرات الافضلية
MLE	107
OLS	19

جدول (2) افضلية طريقتي التقدير باستعمال مقياس المقارنة MSE حسب حجم العينة ولتجربة تكرارها 1000 مرة

الطريقة	حجم العينة						
	n1=20	n2=40	n3=50	n4=100	n5=150	n6=200	n7=300
MLE	7	11	15	16	18	18	18
OLS	11	7	3	2	0	0	0

Comparison Between Two Approaches (MLE &DLS) to Estimate Frechet Poisson Lindley Distribution Compound by Using Simulation

Emad Hazm Abody
Ali Bander Nuimai
Dept. of Mathmatics ,College of Administration and Economy, University of Baghdad

Received in :4 September 2016 ,Accepted in: 2 November 2016

Abstract

In this paper simulation technique plays a vital role to compare between two approaches Maximum Likelihood method and Developed Least Square method to estimate the parameters of Frechet Poisson Lindley Distribution Compound. by coding using Matlab software program. Also, under different sample sizes via mean square error. As the results which obtain that Maximum Likelihood Estimation method is better than Developed Least Square method to estimate these parameters to the proposed distribution.

Keywords: Frechet, Poisson Lindley, Distribution Compound, Simulation, (MLE &DLS)